

государственное общеобразовательное учреждение Самарской области средняя  
общеобразовательная школа им. А.А. Кузьмичёва с. Преполовенка муниципального  
района Безенчукский Самарской области

Программа рассмотрена на заседании ШМО учителей естественно-математического цикла <i>Савинова Е.М.</i> /Савинова Е.М./ Протокол № <u>1</u> от « <u>27</u> » <u>08</u> 2021г	Проверено Зам. директора по УВР <i>Сахтёрова Н.К.</i> /Сахтёрова Н.К./ « <u>30</u> » <u>08</u> 2021г	«Утверждаю» Директор школы <i>Лёхина Н.П.</i> /Лёхина Н.П./ 
--	---	--

**Рабочая программа**  
элективного курса  
по математике  
«Изображение пространственных фигур»

Уровень образования (класс): среднее общее образование (10-11 классы)

Срок реализации: 2 года

Учитель: Савинова Е.М.

2021г

## Пояснительная записка

Предмет данного курса – базовая, опорная составляющая школьного курса стереометрии: изображение пространственных фигур. Как показывают результаты ЕГЭ, за решение геометрических задач берётся низкий процент выпускников, что свидетельствует о трудности восприятия условия таких задач и выполнения чертежей к ним.

Между тем развитое пространственное представление и воображение необходимо не только специалистам, непосредственно связанным с геометрией, но и любому рядовому гражданину: окружающий нас мир структурно является геометрическим.

Обучаясь правильно изображать пространственные фигуры, ученик знакомится с законами восприятия окружающих его предметов, приобретает необходимые практические навыки, формирует свои пространственные представления.

Решение пространственных задач по геометрии, как правило, требует выполнения чертежа, и от того, насколько правильно он сделан, во многом зависит успешность получения результата.

В настоящем курсе рассматриваются способы изображения пространственных фигур с использованием различных проекций: параллельной, ортогональной, центральной. Параллельная проекция удобна для изображения многогранников и построения их сечений. Ортогональное проектирование используется для изображения тел вращения: цилиндра, конуса, сферы, а также комбинаций многогранников и тел вращения. Центральное проектирование, или перспектива, наиболее близко к зрительному восприятию человеком окружающих предметов. Для указанных проекций доказываются свойства, приводятся примеры и исторические сведения.

Отдельно рассматривается вопрос об использовании компьютерных графических редакторов для получения изображений пространственных фигур на экране монитора.

Данный курс содержит рассмотрение некоторых пространственных фигур (призма, конус, цилиндр, шар, их взаимное расположение), которые на момент прохождения отдельных вопросов курса в 10-м классе еще не были изучены (основной материал по круглым телам относится к 11-му классу). Исходя из этого, в данном курсе предусматривается общее знакомство с этим рядом фигур: определение, свойства. Такое опережение будет способствовать более успешному обучению в 11-м классе.

### **Цели и задачи курса**

#### Цели:

– Развитие графической культуры учащихся; развитие пространственного представления и воображения, образного пространственного, логического мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;

– применение полученных знаний и навыков в решении задач;

– воспитание средствами геометрии культуры личности, развитие воображения, внимания, аккуратности; воспитание инициативы, настойчивости, способности к преодолению трудностей;

– формирование навыков работы в творческих группах;

– формирование навыков работы с дополнительной литературой.

#### Задачи для достижения поставленных целей:

– рассмотреть способы изображения пространственных фигур с использованием различных проекций: параллельной, ортогональной, центральной;

– выполнять различные задачи на построение в объёме предусмотренных тем;

– научить строить чертёж по заданному условию конкретной задачи;

– сформировать навык конструирования чертежа к задаче: подбор более удобного ракурса;

– показать возможности применения полученных знаний в профессии художника, архитектора, инженера-строителя;

– познакомить учащихся со способом изображения пространственных фигур с помощью компьютерного графического редактора «Adobe Illustrator»;

– вовлечь учащихся в практическую, проектную деятельность как фактор личностного развития.

### **Требования к уровню усвоения курса**

#### Учащиеся должны знать:

- определения и свойства геометрических фигур;
- правила изображения плоских фигур с использованием различных проекций: параллельной, ортогональной, центральной;
- правила изображения пространственных фигур с использованием различных проекций: параллельной, ортогональной, центральной;
- аксиомы и соответствующие теоремы для построения сечений.

#### Учащиеся должны уметь:

- выполнять грамотный чертёж к задаче;
- применять определения и свойства геометрических фигур для построения чертежей при решении задач;
- применять аксиомы и теоремы для построения сечений;
- логически обосновывать свой выбор;
- использовать возможности персонального компьютера (ПК) для самоконтроля и отработки основных умений, приобретенных в ходе изучения курса.

#### Учащиеся должны владеть:

- приёмами изображения плоских и пространственных фигур;
- приёмами исследования чертежа для более качественного решения задачи;
- приёмами анализа и самоконтроля при построении чертежа.

Учащиеся должны использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

– исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных правил и свойств фигур.

Изучение данного курса дает учащимся возможность:

– повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса планиметрии в объёме данного элективного курса;

– добиться более полного и осознанного понимания курса стереометрии, к которому приступили десятиклассники;

– овладеть навыками построения чертежа и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;

– повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;

– познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов;

– овладеть приемами исследовательской деятельности.

### **Методические рекомендации по организации элективного курса**

Общая продолжительность работы по программе элективного курса «Свойства фигур в пространстве» - 34 часа по 1 часу в неделю. Продолжительность одного занятия - 45 мин. Изучение элективного курса складывается из трёх частей: теоретической, практической, контроля знаний и умений учащихся. Теоретическая часть элективного курса заключается в изложении материала преподавателем по каждой изучаемой теме с приведением примеров и сообщения учащимся дополнительных сведений, не входящих в программу средней школы. Практическая часть элективного курса - в применении учащимися полученных знаний при решении задач. После каждой темы проводится дифференцированная самостоятельная работа, в результате которой оцениваются знания и умения учащихся по пятибалльной системе оценок. В конце года – представление и защита индивидуальных проектов.

### **Формы контроля.**

1. Текущий контроль: самостоятельные работы.
2. Тематический контроль: самостоятельные работы и зачеты.
3. Итоговый контроль: представление и защита индивидуальных проектов.

**Формы работы:** фронтальная, групповая, индивидуальная.

### **Методы работы:**

- на начальном этапе изучения темы: объяснительно-иллюстративный;
- на этапе первичного закрепления материала: репродуктивный;
- на этапе усвоения материала: эвристический, исследовательский, частично-поисковый, проектов.

**Виды деятельности:** беседа, рассказ, лекция; составление тезисов, конспектов; работа с таблицами, карточками, иллюстрациями, моделями, учебником; презентации по теме урока; практикум, графические работы, консультация; работа с компьютером, составление тематического тезауруса (упорядоченного комплекса базовых понятий по разделу, теме); просмотр видео.

### **Учебно-методический комплект:**

1. Смирнова И.М. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10-11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. учреждений / И.М. Смирнова, В.А.Смирнов. – М. : Мнемозина, 2007.

2. Роева Т.В., Хроленко Н.С. Геометрия в таблицах. 10-11 классы : учеб. пособие. Х., 2002. С.11-28. Рассмотрены решения типовых задач каждой темы. Подобраны тренировочные упражнения, самостоятельные и контрольные работы по всем разделам. Самостоятельные и контрольные работы имеют три уровня сложности. К большинству задач даны ответы. В рубрике "Страничка абитуриента" приведены решения задач повышенной сложности.

**Программа курса(Всего 34 часа).**

### **Содержание**

1. Параллельное проектирование. Определение и свойства. Параллельные проекции прямой, двух пересекающихся прямых, двух параллельных прямых, двух скрещивающихся прямых. Сохранение при параллельном проектировании параллельности прямых (отрезков), отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых. Несохранение при параллельном проектировании величин углов, длин отрезков.

2. Параллельные проекции плоских фигур: треугольников произвольных, равнобедренных, равносторонних, прямоугольных; четырёхугольников: семейства параллелограммов, трапеции.

3. Изображение пространственных фигур в параллельной проекции: призма, пирамида, цилиндр, конус, шар.

4. Сечения многогранников. Построение сечений: метод следов, метод вспомогательных сечений. Сечения призм и пирамид.

5. Ортогональное проектирование. Определение. Ортогональное проектирование как частный случай параллельного проектирования. Построения пространственных фигур в ортогональной проекции.

6. Ортогональное проектирование. Изображение комбинаций многогранников и круглых тел в ортогональной проекции.

7. Центральное проектирование. Перспектива. Определение. Изменение изображения фигуры в зависимости от расположения центра проектирования и плоскости проектирования.

8. Центральное проектирование. Построение проекций. Построение сечений.

9. Использование графического редактора «Adobe Illustrator» для изображения пространственных фигур. Работа в программе.

### Учебно-тематический план

п/п	Тема	Количество часов		Содержание работы
		Теория	Практика	

1	Введение. Цели и задачи курса. Роль изображений при решении геометрических задач.	1		Знакомство с практическими задачами. Обсуждение необходимой литературы по теме.
2	Параллельное проектирование и его свойства.	1	2	Решение упражнений.
3	Параллельные проекции плоских фигур	1	2	Решение упражнений и задач.
4	Изображение пространственных фигур в параллельной проекции	1	2	Решение упражнений и задач.
5	Сечения многогранников. Построение сечений многогранников.	1	3	Решение упражнений и задач.
6	Ортогональное проектирование и его свойства.	1	2	Анализ и решение практических задач
7	Зачет №1		1	
8	Изображение круглых тел в ортогональной проекции.	1	2	Решение упражнений и задач.
9	Изображение комбинаций многогранников и круглых тел в ортогональной проекции.	1	2	Решение упражнений и задач.
10	Центральное проектирование и его свойства. Перспектива	1	2	Анализ и решение практических задач
11	Изображение пространственных фигур в центральной проекции (перспективе).	1	1	Решение упражнений и задач.
12	Использование графического редактора «Adobe Illustrator» для	1	2	Овладение базовыми умениями ИТ (Основы работы с графическим редактором).

	изображения пространственных фигур			Проектировочная деятельность. Составление индивидуальных проектов (творческая деятельность).
13	Зачет №2		2	Представление и защита индивидуальных проектов по всему курсу.

### Список литературы

1. Бескин Н.М. Методы изображений. Энциклопедия элементарной математики. Кн. IV. – М.: Физматлит, 1963.
2. Василевский А.Б. Метод параллельных проекций. – Минск : Народная асвета, 1985
3. Костицын В.Н. Моделирование на уроках геометрии. – М. : Владос, 2000.
4. Макарова М.Н. Перспектива. – М. : Просвещение, 1989.
5. Польский И.Г. Проекционный чертёж и построения на нем. – М. : Учпедгиз, 1962.
6. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М. : Мнемозина, 2006.
7. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Компьютер помогает геометрии. – М. : Дрофа, 2003.
8. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Изображение пространственных фигур. Элективный курс для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М. : Мнемозина, 2007
9. Четверухин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. – М. : Учпедгиз, 1946.
10. Четверухин Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз, 1955.
11. Конические сечения: URL: <http://www.rae.ru/monographs/67-2574>
12. Цилиндрические сечения: URL: <http://cdot-nntu.ru/basebook/ng1/system/teor/teor48.html>
13. Построение сечений многогранников: URL: <http://www.myshared.ru/slide/151822/>
14. Центральное проектирование: URL: <http://www.myshared.ru/slide/547812/>

## ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Лекция, предлагаемая вашему вниманию, посвящена изображению пространственных фигур. Умение изображать пространственные фигуры необходимо не только будущему математику, физика, инженеру, конструктору, но и скульптору, архитектору, художнику, дизайнеру и вообще каждому человеку. Обучаясь правильно изображать пространственные фигуры, ученик знакомится с законами восприятия окружающих его предметов, приобретает необходимые практические навыки, формирует свои пространственные представления. Решение пространственных задач по геометрии, как правило, требует выполнения чертежа, и от того, насколько правильно он выполнен, во многом зависит успешность решения самой задачи.

Здесь мы рассмотрим способы изображения пространственных фигур, использующие различные проекции: параллельную, ортогональную, центральную. Параллельная проекция удобна для изображения многогранников и построения их сечений. Ортогональное проектирование используется для изображения тел вращения: цилиндра, конуса, сферы, а также комбинаций многогранников и тел вращения. Центральное проектирование, или перспектива, наиболее близко к зрительному восприятию человеком окружающих предметов.

### 1. Параллельное проектирование

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно в геометрии для этого используется параллельное проектирование пространственной фигуры на плоскость.

Пусть  $\pi$  – некоторая плоскость,  $l$  – пересекающая ее прямая (рис. 1). Через произвольную точку  $A$ , не принадлежащую прямой  $l$ , проведем прямую, параллельную прямой  $l$ . Точка пересечения этой прямой с плоскостью  $\pi$  называется параллельной проекцией точки  $A$  на плоскость  $\pi$  в направлении прямой  $l$ . Обозначим ее  $A'$ . Если точка  $A$  принадлежит прямой  $l$ , то параллельной проекцией  $A$  на плоскость  $\pi$  считается точка пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\pi$ .

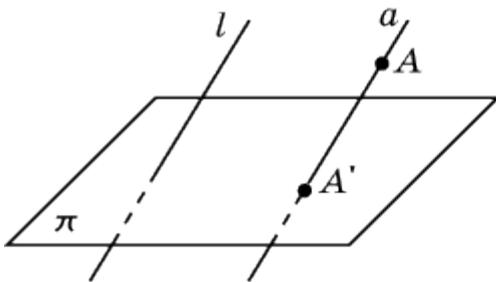


Рис. 1

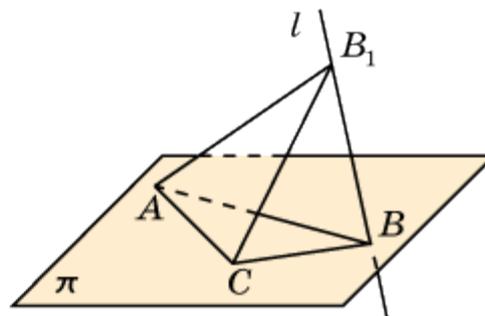


Рис. 2

Таким образом, каждой точке  $A$  пространства сопоставляется ее проекция  $A'$  на плоскость  $\pi$ . Это соответствие называется **параллельным проектированием** на плоскость  $\pi$  в направлении прямой  $l$ .

Пусть  $\Phi$  - некоторая фигура в пространстве. Проекции ее точек на плоскость  $\pi$  образуют фигуру  $\Phi'$ , которая называется **параллельной проекцией** фигуры  $\Phi$  на плоскость  $\pi$  в направлении прямой  $l$ . Говорят также, что фигура  $\Phi'$  получена из фигуры  $\Phi$  параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Используя свойства параллельности прямых и плоскостей в пространстве, нетрудно доказать следующие свойства параллельного проектирования.

**Свойство 1.** Если прямая параллельна или совпадает с прямой  $l$ , то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой  $l$ , то ее проекцией является прямая.

**Свойство 2.** Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой  $l$ , или нет. Параллельное проектирование сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на прямой, не параллельной и не совпадающей с прямой  $l$ . В частности, при параллельном проектировании середина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка.

**Свойство 3.** Если две параллельные прямые не параллельны прямой  $l$ , то их проекции в направлении  $l$  могут быть или параллельными прямыми или одной прямой.

**Свойство 4.** Если плоская фигура  $F$  лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования  $\pi$ , то ее проекция  $F'$  на эту плоскость будет равна фигуре  $F$ .

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон или отрезок. Причем, если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако, поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть не прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Простейшим многоугольником является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При

этом, если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Докажем, что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник  $ABC$  в плоскости  $\pi$  (рис. 2). Построим на одной из его сторон, например,  $AC$  равносторонний треугольник  $AB_1C$  так, чтобы точка  $B_1$  не принадлежала плоскости  $\pi$ . Обозначим через  $l$  прямую, проходящую через точки  $B_1$  и  $B$ . Тогда ясно, что треугольник  $ABC$  является параллельной проекцией треугольника  $AB_1C$  на плоскость  $\pi$  в направлении прямой  $l$ .

Рассмотрим теперь параллельную проекцию правильного шестиугольника  $ABCDEF$  с центром в точке  $O$  (рис. 3). Выберем какой-нибудь треугольник, например,  $AOB$ . Его проекцией может быть треугольник  $A'O'B'$  на плоскости  $\pi$  (рис. 4), имеющий произвольную форму. Далее отложим  $O'D'=A'O'$  и  $O'E'=B'O'$ . Теперь из точек  $A'$  и  $D'$  проведем прямые, параллельные прямой  $B'O'$ ; из точек  $B'$  и  $E'$  проведем прямые, параллельные прямой  $A'O'$ . Точки пересечения соответствующих прямых обозначим  $F'$  и  $C'$ . Шестиугольник  $A'B'C'D'E'F'$  и будет искомым проекцией правильного шестиугольника  $ABCDEF$ .

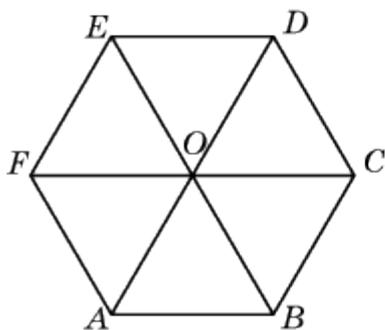


Рис. 3

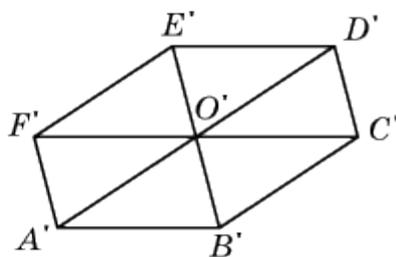


Рис. 4

Параллельная проекция обычно используется для изображения многогранников. Приведем примеры изображений многогранников.

Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все его грани параллелограммы и, следовательно, изображаются параллелограммами (рис. 5).

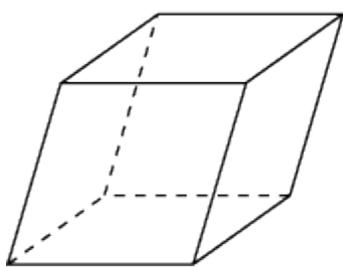


Рис. 5

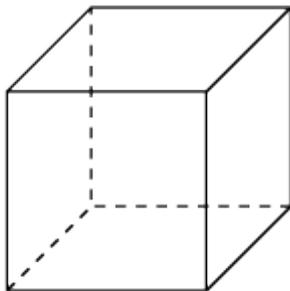


Рис. 6

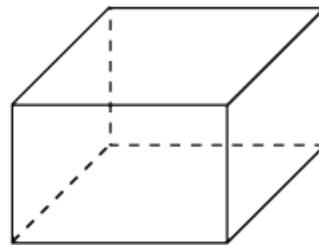


Рис. 7

При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (рис. 6). Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (рис. 7).

Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (рис. 8).

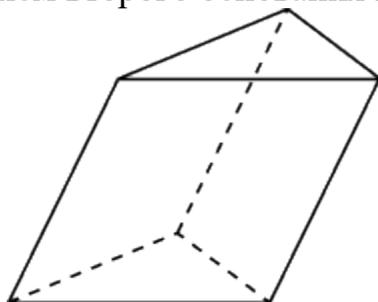


Рис. 8

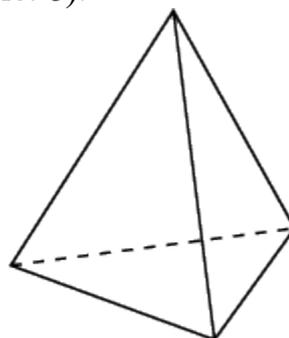


Рис. 9

Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее с вершинами многоугольника (рис. 9). Полученные отрезки будут изображать боковые ребра пирамиды.

### Упражнения

1. В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?
2. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая?
3. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых?
4. Сохраняются ли при параллельном проектировании: а) длины отрезков; б) величины углов?
5. Верно ли, что если длина отрезка равна длине его параллельной проекции, то отрезок параллелен плоскости проектирования?
6. Точки  $A'$ ,  $B'$  являются параллельными проекциями точек  $A$ ,  $B$ .  $AA' = a$ ,  $BB' = b$ . Точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $m : n$ . Найдите расстояние между точкой  $C$  и ее проекцией  $C'$ .
7. Может ли параллельной проекцией равностороннего треугольника быть: а) прямоугольный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник?
8. Может ли параллельной проекцией прямоугольника быть: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) трапеция?

9. Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника:  
 а) медианы проектируются в медианы; б) высоты проектируются в высоты; в) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

10. Изобразите параллельную проекцию: а) правильного пятиугольника; б) правильного восьмиугольника.

11. Постройте изображение куба, две грани которого параллельны плоскости изображений.

12. Постройте изображения прямого и наклонного параллелепипеда, две противоположные грани которых параллельны плоскости изображения.

13. Постройте изображение правильной шестиугольной призмы.

14. Изобразите в параллельной проекции правильную четырехугольную пирамиду.

15. Изобразите правильный октаэдр  $SABCD S'$ , две диагонали  $AC$  и  $SS'$  которого параллельны плоскости проектирования. Каким будет изображение четырехугольника  $ASCS'$ ?

16. Параллельными проекциями каких многогранников являются фигуры, изображенные на рисунке 10?

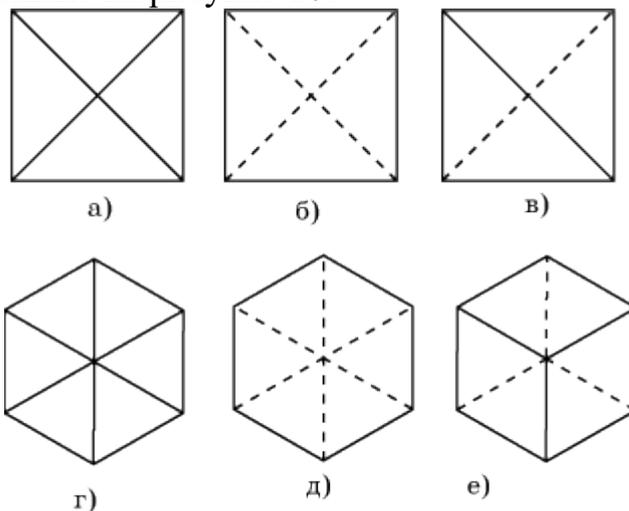


Рис. 10

17. Возможен ли многогранник, изображение которого показано на рисунке 11?

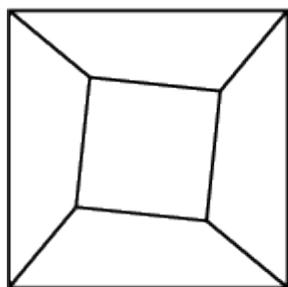


Рис. 11

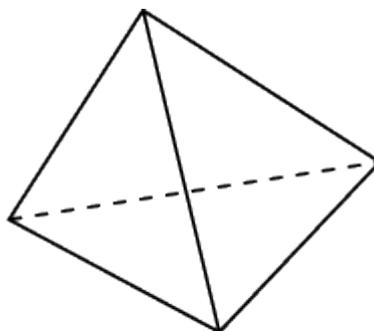


Рис. 12

18. Дано изображение правильного тетраэдра  $ABCD$  (рис. 12). Постройте высоту этого тетраэдра, опущенную из вершины  $D$ .